Флоренский П., свящ. Приведение чисел: (К математическому обоснованию числовой символики) // Богословский вестник 1916. Т. 2. № 6. С. 292–321 (2-я пагин.).

Приведеніе чиселъ.

(Къ математическому обоснованію числовой символики).

Занимавшимся исторіей мысли, особенно древней, извѣстно обще-человѣческое убѣжденіе въ возможности замѣнять, при символическихъ разсужденіяхъ, число суммою его цифръ. Число и сумма его цифръ въ какомъ-то смыслѣ равнозначущи, по оцѣнкѣ мыслителей, пользовавшихся понятіемъ числа при разработкѣ общаго міропониманія. Увѣренность въ этой символической эквивалентности есть и была одною изъ основныхъ предпосылокъ метафизики чиселъ. Эта предпосылка прежде всего важна практически, ибо, опираясь на нее, можно замѣнять въ разсужденіяхъ большія многозначныя числа числами меньшими и даже однозначными, т. е. доступными и болѣе непосредственному пониманію. Такая замѣна обычно называется „еврейскимъ“ или „каббалистическимъ“ или „теософскимъ сокращеніемъ чиселъ“; а то, что получается послѣ подобнаго дѣйствія надъ числомъ, мы будемъ именовать „приведеніемъ“ его или его „редукціей“.

Въ чемъ же смыслъ теософскаго сокращенія? Съ редукціей чиселъ встрѣчаешься при чтеніи разныхъ, древнихъ и новыхъ, писателей; съ другой стороны, видишь, что нѣкоторыя жизненныя явленія порою до странности точно входятъ въ рамки, назначаемыя имъ символикою, при пользованіи именно дѣйствіемъ теософскаго сокращенія; въ иныхъ случаяхъ, на подобное же сокращеніе можно наткнуться въ математикѣ— таковы, напримѣръ, всякому школьнику извѣстные признаки дѣлимости чиселъ на 3 и на 9. Все это побуждаетъ искать, нѣтъ ли математическихъ основаній, оправдывающихъ такое сокращеніе чиселъ и побуждающихъ въ этомъ сокращеніи видѣть не прихоть воображенія, подтверждаемую нѣсколькими случайными совпаденіями съ дѣйствительными свойствами числовыхъ и жизненныхъ явленій, но подлинный законъ тѣхъ и другихъ, открытый интуитивно. Отвѣтомъ на поставленный вопросъ отчасти служатъ предлагаемыя здѣсь соображенія, надѣюсь—точныя, хотя и въ границахъ первоначальныхъ математическихъ познаній. Отмѣтимъ при этомъ еще лишь, что мистическая ариѳметика далеко не всегда держится десятичной системы счисленія, въ разныхъ случаяхъ замѣняя ее двоичною, троичною и т. д., смотря по надобности. Это побуждаетъ и насъ вести свои разсужденія, не ограничивая себя системою счисленія съ тѣмъ или инымъ опредѣленнымъ основаніемъ, но имѣя предъ умственнымъ взоромъ общій случай числа, написаннаго по системѣ съ любымъ основаніемъ α. Рискую выразить и свое убѣжденіе, что излагаемое, при всей несложности доказательствъ, можетъ быть полезно не только историку мысли, но и изслѣдователю самыхъ чиселъ; вѣдь въ предлагаемыхъ наглядныхъ схемахъ дѣлаются доступными непосредственному созерцанію многія свойства чиселъ, обычно остающіяся формальными и потому мало убѣдительными, какъ бы строго ни были доказаны соотвѣтственныя теоремы.

§ 1.—Понятіе о послѣдовательныхъ редукціяхъ.

Пусть мы имѣемъ чило A, дѣйствительное, цѣлое и,—предположимъ для простоты—, положительное. Выраженное по α-ичной системѣ счисленія (т. е. имѣющей основаніемъ число α) число A представится въ видѣ:

$$A = \alpha^0 a_1 + \alpha^1 a_2 + \alpha^2 a_3 + \alpha^3 a_4 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} a_n \qquad [1]$$

при чемъ всѣ числа $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots . a_n$ удовлетворяютъ двойному неравенству

$$o \leq a_i \leq \alpha \qquad [2]$$

$$(i = 1,2,3, \ldots n).$$

При этомъ, по крайней мѣрѣ старшій членъ, т. е.

$$a_n > o \qquad [2]$$

Возьмемъ сумму чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Эту сумму мы назовемъ первой редукціей числа A. Считая ее числомъ, выраженнымъ по α-ичной системѣ, мы найдемъ, что она представится въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} R' &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_n \\ &= \alpha^0 a'_1 + \alpha^1 a'_2 + \alpha^2 a'_3 + \alpha^3 a'_4 + \ldots \alpha^{n'-1} a'_{n'} \end{aligned}\right| \qquad [4]$$

при чемъ,

$$0 \leq a'_i \leq \alpha \qquad [5]$$

$$(i = 1,2,3,\ldots n')$$

и по крайней мѣрѣ старшій членъ

$$a'_{n'} > 0 \qquad [6]$$

Подобнымъ же образомъ сумма α-ичныхъ знаковъ $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots a'_{n'}$, дастъ редукцію редукціи R', т. е. вторую редукцію числа A. Обозначимъ ее черезъ R''.

$$\left.\begin{aligned} R'' &= a'_1 + a'_2 + a'_3 + \ldots\ldots a'_{n'} \\ &= \alpha^0 a''_1 + \alpha^1 a''_2 + \alpha^2 a''_3 + \ldots\ldots + \alpha^{n''-1} a''_{n''} \end{aligned}\right| \qquad [7]$$

Тутъ

$$0 \leq a''_i \leq \alpha \qquad [8]$$

$$(i = 1,2,3,\ldots n'')$$

и по крайней мѣрѣ старшій членъ

$$a''_{n''} > 0 \qquad [9]$$

Подобнымъ же образомъ третья редукція A, — R''' —, т. е. первая редукція R'', представится въ α-ичной системѣ такъ:

$$\left.\begin{aligned} R''' &= a'''_1 + a'''_2 + a'''_3 + \ldots + a'''_{n'''} \\ &= \alpha^0 a'''_1 + \alpha^1 a'''_2 + \alpha^2 a'''_3 + \ldots\ldots + \alpha^{n'''-1} a'''_{n'''} \end{aligned}\right| \qquad [10]$$

гдѣ

$$0 \leq a'''_i \leq \alpha \qquad [11]$$

$$(i = 1,2,3,\ldots\ldots n''')$$

и по крайней мѣрѣ старшій членъ

$$a'''_{n'''} > 0 \qquad [12]$$

Продолжая такъ редукціонный процессъ далѣе и далѣе, мы дойдемъ до j-той редукціи A,—$R^{(j)}$—, выражающейся равенствами:

$$\left.\begin{aligned} R^{(j)} &= a_1^{(j-1)} + a_2^{(j-1)} + a_3^{(j-1)} + \ldots\ldots + a^{(j-1)}_{n^{(j-1)}} \\ &= \alpha^0 a_1^{(j)} + \alpha^1 a_2^{(j)} + \alpha^2 a_3^{(j)} + \ldots + \alpha^{j-1} a^{(j)}_{n^{(j)}} \end{aligned}\right| \qquad [13]$$

гдѣ

$$0 \leq a_i^{(j)} < \alpha \qquad [14]$$

$$(i = 1,2,3,\ldots n^{(j)})$$

и по крайней мѣрѣ

$$a_{n^{(j)}}^{(j)} > 0 \qquad [15]$$

и т. д. Въ виду того, что рядъ чиселъ $n, n', n'', n''', \ldots n^{(j-1)} n^{(j)}, \ldots$ составляетъ рядъ убывающій,

$$n > n' > n'' > n''' > \ldots\ldots > n^{(j-1)} > n^{(j)} > \ldots\ldots \qquad [16]$$

а числа эти—цѣлыя, то онъ, по необходимости, долженъ кончиться, приведя къ такому числу $n^{(k)}$, при k-той редукціи, которое равно 1-цѣ, такъ что $R^{(k)}$ будетъ состоять изъ одного только α-ичнаго знака $a_1^{(k)}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} R^{(k)} &= a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)} + a_3^{(k-1)} + \ldots + a_n^{(k-1)} \\ &= \alpha^0 a_1^{(k)} \end{aligned}\right| \quad [17]$$

гдѣ

$$o < a_1^{(k)} < \alpha \quad [18]$$

Далѣе редукція невозможна, т. к. всѣ послѣдующія редукціи тождественны съ $R^{(k)}$.

Примѣръ последовательныхъ редукцій.—Пусть имѣемъ число

$$A = 3758963790219,$$

написанное по 10-ичной системѣ счисленія, т. е. при $\alpha = 10$. Тогда его изслѣдовательныя редукціи R', R'', R''' представятся какъ

$R' = 3 + 7 + 5 + 8 + 9 + 6 + 3 + 7 + 9 + 0 + 2 + 1 + 9 = 69$
$R'' = 6 + 9 = 15$
$R''' = 1 + 5 = 6$

§ 2.—Теорема о сравнимости по модулю $\overline{\alpha-1}$ числа и всѣхъ его редукцій.

Теорема.—Число A и всѣ его послѣдовательныя редукціи $R', R'' R''', \ldots R^{(n)}$, выраженныя въ α-ичной системѣ счисленія, сравнимы между собою по модулю $\overline{\alpha-1}$, т. е.

$$A \equiv R' \equiv R'' \equiv R''' \equiv \ldots \equiv R^{(k)} \text{ (мод. } \overline{\alpha-1}) \quad [19]$$

Доказательство.—Прежде всего замѣчаемъ, что намъ, собственно, достаточно доказать сравнимость по модулю $\overline{\alpha-1}$ числа A и его первой редукціи R', ибо каждая изъ послѣдующихъ редукцій представляетъ собою первую редукцію предыдущей и, слѣдовательно, относительно каждой пары смежныхъ редукцій можно будетъ повторить доказанное примѣнительно къ A и R'. Итакъ, докажемъ, что

$$A \equiv R' \text{ (мод. } \overline{\alpha-1}) \quad [19']$$

Обращаясь къ формуламъ [1] и [4] замѣчаемъ, что A и R' представляютъ суммы соотвѣтственныхъ членовъ $\alpha^{i-1}a_i$ и a_i. Если бы мы доказали равноостаточность *этихъ* членовъ по модулю $\overline{\alpha-1}$, т. е. справедливость сравненія

$$\alpha^{i-1}a_i \equiv a_i \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}), \qquad [20]$$

то, придавая затѣмъ индексу i всевозможныя значенія, отъ 1 до n, и суммируя по частямъ полученныя n сравненій, мы получили бы сравненіе

$$\sum_1^n \alpha^{i-1}a_i \equiv \sum_1^n a_i \ (\text{мод } \alpha-1) \qquad [21]$$

или, что то̀ же, искомое сравненіе [19′].

Итакъ, для доказательства формулы [19′] необходимо доказать сравненіе [20].

Но, вглядываясь въ [20], находимъ, что для доказательства его достаточно доказать сравненіе

$$\alpha^{i-1} \equiv 1 \ (\text{мод. } \alpha-1) \qquad [22]$$

Если бы оно было доказано, то, умножая его почленно на a_i (отъ чего сравненіе не нарушится), мы бы получили сравненіе [20].

Доказательство же сравненія [22] можетъ быть получено изъ сравненія

$$\alpha \equiv 1 \ (\text{мод. } \alpha-1) \qquad [23]$$

которое очевидно, если представить его въ формѣ обычнаго тождества

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} = Ц + \frac{1}{\alpha-1} \qquad [24]$$

гдѣ „Ц", согласно обозначенію, предложенному † Н. В. Бугаевымъ, означаетъ цѣлое число.

Умножая обѣ части равенства [24] на α^{i-2}, получаемъ:

$$\frac{\alpha^{i-1}}{\alpha-1} = Ц + \frac{\alpha^{i-2}}{\alpha-1} \qquad [25]$$

Подобнымъ же образомъ, помножая обѣ части тождества [24] на $\alpha^{i-3}, \alpha^{i-4}, \ldots \alpha^2, \alpha$, мы получимъ рядъ тождествъ, который, съ присоединеніемъ къ нимъ вышенаписанныхъ [25] и [24], представится въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\alpha^{i-1}}{\alpha-1} = Ц + \dfrac{\alpha^{i-2}}{\alpha-1} \\
\dfrac{\alpha^{i-2}}{\alpha-1} = Ц + \dfrac{\alpha^{i-3}}{\alpha-1} \\
\dfrac{\alpha^{i-3}}{\alpha-1} = Ц + \dfrac{\alpha^{i-4}}{\alpha-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right| \qquad [26]$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha-1}=\text{Ц}+\frac{\alpha^1}{\alpha-1}$$
$$\frac{\alpha^1}{\alpha-1}=\text{Ц}+\frac{\alpha^0}{\alpha-1}$$

Складывая эти $\overline{i-1}$ равенствъ по частямъ и замѣчая, что члены направо и налѣво сокращаются, получаемъ по сокращеніи:

$$\frac{\alpha^{i-1}}{\alpha-1}=\text{Ц}+\frac{1}{\alpha-1} \qquad [27]$$

или

$$\alpha^{i-1}\equiv 1 \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \qquad [28]$$

т. е. доказательство сравнимости α^{i-1} и 1 по мод. $\overline{\alpha-1}$ (см. [22]).

Умножая сравненіе [28], какъ сказано, по частямъ на a_i, дѣлая i всевозможными, отъ 1 до n, и складывая по частямъ полученныя n сравненій, находимъ сравненіе [21] или, что то же, сравненіе [19′]. Принимая же во вниманіе, что все сказанное выше относится и къ любой парѣ смежныхъ чиселъ $A, R', R'', R''', \dots R^{(k)}$, изъ которыхъ предыдущее принимается за основное число, а послѣдующее—за его первую редукцію, мы убѣждаемся въ равноостаточности всѣхъ чиселъ $A, R', R'', R''', \dots R^{(k)}$ по модулю $\overline{\alpha-1}$, т. е. въ справедливости формулы [19],

Ч. Т. Д.

§ 3.—Геометрическая интерпретація теоремы § 2-го.

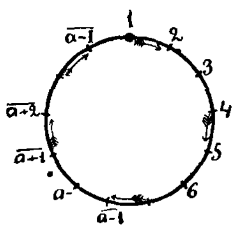
Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать свойства чиселъ A, общія имъ и числамъ равноостаточнымъ съ ними по модулю $\overline{\alpha-1}$. Какъ видно изъ доказанной теоремы (§ 2), эти свойства не затрагиваются редуцированіемъ чиселъ A, сколько бы ни продолжался редукціонный процессъ; они пребываютъ въ процессѣ. Поэтому мы вправѣ подмѣнить разсмотрѣніе чиселъ A разсмотрѣніемъ ихъ послѣдовательныхъ редукцій $R', R'', R''', \dots R^{(k)}$, отъ чего интересующія насъ свойства окажутся инваріантными. (Если угодно, мы можемъ сказать теперь, что будемъ изучать свойства чиселъ A, пребывающія инваріантными при сколь-угодно далеко идущемъ редукціонномъ процессѣ). Этимъ мы воспользуемся для того, чтобы подмѣнять числа A числами $R^{(k)}$, которыя, какъ видно изъ неравенства [18], непремѣнно $< \alpha$. Итакъ, все дальнѣйшее изученіе сводится къ изученію $\overline{\alpha-1}$ чиселъ:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \ldots \overline{\alpha-3}, \overline{\alpha-2}, \overline{\alpha-1} \qquad [29].$$

Перейдемъ теперь къ геометрическому толкованію высказанныхъ выше положеній.—Представимъ себѣ окружность. (см. чертежъ 1-й). Раздѣлимъ ее на $\overline{\alpha-1}$ равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія поставимъ соотвѣтственно числа ряда [29]. Т. к. каждое число А приводится къ одному изъ чиселъ ряда [29], то сказанныя $\overline{\alpha-1}$ точекъ изобразятъ собою, съ нужной для насъ стороны, инваріантной въ редукціонномъ процессѣ, в с ѣ существующія числа, и каждое изъ чиселъ А принадлежитъ къ типу одного изъ чиселъ ряда [29]. Съ другой стороны, всѣ эти $\overline{\alpha-1}$ чиселъ [29] между собою различны и далѣе уже не редуцируемы. Они—элементы *системы счисленія съ основаніемъ* α. Если $\alpha = 10$, то эти элементы суть:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \qquad [29'].$$

Все, сказанное доселѣ, вытекаетъ изъ теоремы § 2-го. Но въ этомъ же можно убѣдиться и непосредственно, обращаясь къ геометрической интуиціи. Пусть у насъ имѣется нѣкоторое число А. Если $A < \alpha$, то оно непосредственно изобразится одною изъ поставленныхъ точекъ. Если же $A > \alpha$, то, чтобы подойти къ нему, надо было бы двигаться по часовой стрѣлкѣ вдоль окружности, занумеровывая послѣдовательно проходимыя точки. Обойдя нѣсколько разъ всю окружность, мы остановимся, наконецъ, на А-той пройденной точкѣ. Она и изображаетъ изслѣдуемое число А. Посмотримъ, каковъ ея истинной нумеръ—число изъ ряда [29]. Чтобы найти его, надо выдѣлить изъ А всѣ цѣлые обходы окружности, т. е. раздѣлить А на $\overline{\alpha-1}$, ибо таково число точекъ одного обхода. Остатокъ отъ выдѣленія и будетъ искомымъ нумеромъ А-той точки; но этотъ остатокъ есть число, сравнимое съ А по модулю $\overline{\alpha-1}$ и, при томъ, наименьшее, т. е. послѣдняя редукція А,—$R^{(k)}$. Итакъ, наши $\overline{\alpha-1}$ точекъ изображаютъ собою наименьшія редукціи всѣхъ чиселъ, написанныхъ по α-ичной системѣ счисленія.



Чертежъ 1-й.

§ 4.—Основное раздѣленіе чиселъ 1, 2, 3, 4, . . . α—1 на два класса.

Всѣ числа α-ичной системы счисленія распредѣляются на $\overline{\alpha-1}$ группъ, во главѣ которыхъ стоятъ $\overline{\alpha-1}$ чиселъ ряда [29]. Но эти $\overline{\alpha-1}$ группъ чиселъ или, если угодно, числа [29], ихъ возглавляющія, оказывается возможнымъ распредѣлить на два существенно разнящіеся класса, при чемъ распредѣленіе это красиво схематизируется на указанномъ въ § 3 геометрическомъ образѣ.

Пусть намъ дано нѣкоторое число а, которое предполагаемъ однозначнымъ или уже редуцированнымъ, такъ что

$$o < a < \alpha \qquad [30]$$

Образуемъ, далѣе, безконечную ариѳметическую прогрессію (помножая число а на 1, 2, 3, . . . n, . . .), т. е. рядъ

$$\div 1.a,\ 2.a,\ 3.a,\ 4.a,\ 5.a, \ldots \ldots n\,.\,a, \ldots \ldots \qquad [31]$$

и редуцируемъ всѣ члены этого ряда, обозначая редукціи ихъ чрезъ а съ индексомъ, соотвѣтствующимъ коэффиціенту. Первый членъ обозначимъ для симметріи черезъ a_1. Тогда получимъ безконечный рядъ чиселъ (изъ которыхъ каждое болѣе нуля и менѣе α):

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots \qquad [32]$$

при чемъ

$$o < a_i < \alpha \qquad [33]$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots \ldots n \ldots \ldots)$$

Двойное неравенство [33] показываетъ, что числа ряда [32] могутъ принимать не болѣе, какъ $\overline{\alpha-1}$ различныхъ значеній ряда [29] и потому, по необходимости, должны повторяться. Но при этомъ возможны два случая, и наступленіе того или другого изъ нихъ обусловливается свойствами числа а, родоначальника (перваго члена и знаменателя) прогрессіи [31].

1-ый случай.—Числа безконечнаго ряда [32] своимъ повтореніемъ исчерпаютъ всѣ $\overline{\alpha-1}$ чиселъ ряда конечнаго [29], такъ что въ каждой изъ α—1 групъ чиселъ непремѣнно будутъ члены прогрессіи [32]. Тогда каждая изъ точекъ изобразительной окружности (см. § 2) представитъ собою хотя одинъ изъ членовъ прогрессіи [32]. Число а, порождающее такую прогрессію, которая исчерпываетъ всѣ точки окружности, назовемъ полнымъ и отнесемъ его къ I-му классу чиселъ.

2-ой случай.—Числа безконечнаго ряда [32] своимъ повтореніемъ не исчерпываютъ всѣхъ $\alpha-1$ чиселъ конечнаго ряда [29], такъ что не въ каждой изъ $\alpha-1$ группъ чиселъ непремѣнно будутъ члены прогрессіи [32]. Тогда не каждая изъ точекъ изобразительной окружности (см. § 2) представитъ собою хотя бы одинъ изъ членовъ прогрессіи [31]. Число a, порождающее такую прогрессію, которая не можетъ исчерпать всѣхъ точекъ окружности, назовемъ неполнымъ и отнесемъ его ко II-му классу чиселъ.

Примѣръ чиселъ классовъ I и II.—Пусть $\alpha=10$. Возьмемъ для примѣра два числа $a'=4$ и $a''=3$ и сдѣлаемъ для нихъ все выше-указанное. Получимъ прежде всего двѣ ариѳметическія прогрессіи:

$\div$ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, ...

$\div$ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, ...

Редуцируя ихъ члены получимъ соотвѣтственно ряды:

4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, ...

3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9, 3, 6, 9, ...

Мы видимъ, что число $a'=4$ даетъ рядъ, исчерпывающій всѣ 9 чиселъ [29]:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

соотвѣтствующаго въ данномъ случаѣ ряду [29]. Но рядъ, порожденный числомъ $a''=3$, систематически повторяетъ только три числа

3, 6, 9,

тогда какъ остальныя числа [29′] не попадаютъ въ рядъ. Итакъ, первое число, т. е. $a'=4$,—класса I, полное, тогда какъ второе, т. е. $a''=3$,—класса II, неполное.

§ 5.—Признаки чиселъ классовъ I и II.

Установимъ теперь *признаки*, по которымъ можно было бы различить, принадлежитъ ли данное число a къ классу I или къ классу II. Прежде всего, вспоминая опредѣленія § 4, мы можемъ сказать, что редукція числа na, гдѣ n—какое-угодно число, для чиселъ класса I должна, при надлежащемъ подборѣ n, равняться произвольно выбранному числу изъ ряда [29]. Это послѣднее мы обозначимъ черезъ ι. Другими словами, если a—число полное, то надлежащимъ подборомъ n можно удовлетворить сравненіе

$$\mathrm{na} \equiv \iota \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \qquad [34]$$

при ι произвольномъ и стѣсненномъ лишь условіемъ

$$0 < \iota < \alpha. \qquad [35]$$

Итакъ, первый признакъ принадлежности a къ классу I или классу II можно сформулировать такъ: если мо́жно удовлетворить сравненіе,[34] надлежащимъ подборомъ n, или, раздѣльнѣе, если мо́жно удовлетворить $\overline{\alpha-1}$ сравненій

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{n_1a} \equiv 1 \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \\ \mathrm{n_2a} \equiv 2 \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{n}_{\overline{\alpha-2}}\mathrm{a} \equiv \overline{\alpha-2} \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \\ \mathrm{n}_{\overline{\alpha-1}}\mathrm{a} \equiv \overline{\alpha-1} \ (\text{мод. } \overline{\alpha-1}) \end{array}\right| \qquad [36]$$

выбравъ $\overline{\alpha-1}$ надлежащихъ значеній для $\mathrm{n_1, n_2, n_3, \dots}$ $\mathrm{n}_{\overline{\alpha-2}}$, $\mathrm{n}_{\overline{\alpha-1}}$, то число a—полное, класса I. Если же это окажется невозможнымъ ни при какихъ подборахъ системы чиселъ $\mathrm{n_1, n_2, n_3, \dots n}_{\overline{\alpha-2}}$, $\mathrm{n}_{\overline{\alpha-1}}$, то число a—неполное, класса II.

Переписывая сравненіе [34] въ видѣ равенства, получаемъ:

$$\frac{\mathrm{na}-\iota}{\alpha-1} = \text{Ц} \qquad [37]$$

и тогда предыдущій признакъ представится въ такомъ видѣ: если, при всевозможныхъ значеніяхъ ι изъ ряда [29] можно подобрать пары цѣлыхъ чиселъ n и Ц, удовлетворяющихъ уравненію [37], то число a—класса I, если же нѣтъ, то—класса II.

Изъ уравненія [37] слѣдуетъ, что a имѣетъ слѣдующій видъ, если оно принадлежитъ къ классу I:

$$\mathrm{a} = \frac{\text{Ц}\,(\alpha-1)+\iota}{\mathrm{n}}$$

Такова формула, изображающая всѣ мыслимыя числа перваго типа.

Давая Ц и n всевозможныя значенія, а ι—значенія [29], мы найдемъ нѣкоторую группу чиселъ. Выдѣляя затѣмъ изъ нея тѣ, которыя соотвѣтствуютъ разнымъ ι и гнѣздами (по $\overline{\alpha-1}$ въ подгруппѣ) равны между собою, мы отыщемъ всѣ

полныя числа. Иначе говоря, всякое полное число a можетъ быть представлено въ $\overline{\alpha-1}$ слѣдующихъ видахъ:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{Ц_1(\alpha-1)+1}{n_1} \\ &= \frac{Ц_2(\alpha-1)+2}{n_2} \\ &= \frac{Ц_3(\alpha-1)+3}{n_3} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &= \frac{Ц_{\overline{\alpha-1}}(\alpha-1)+(\alpha-1)}{n_{1\overline{\alpha-1}}} \end{aligned}\right| \qquad [39]$$

гдѣ $Ц_i$ и n_i $(i=1, 2, 3, \dots \overline{\alpha-1})$—произвольно подобранныя пары цѣлыхъ чиселъ, лишь бы они, эти числа, удовлетворяли равенствамъ [39] и дополнительному условію

$$o < a < \alpha \qquad [40]$$

Обращаясь снова къ формулѣ [37], мы представимъ критерій различенія классовъ I и II въ новой формѣ. Опредѣлимъ изъ [37] число ι.

$$\iota = na - Ц(\alpha-1) \qquad [41]$$

при дополнительномъ условіи [35]. Дальнѣйшее изслѣдованіе заключается въ томъ, чтобы показать, при какихъ условіяхъ число ι можетъ принимать всѣ значенія ряда [29], т. е. разнящіяся между собою на 1, и при какихъ—этого не будетъ. Въ первомъ случаѣ число a—полное, во второмъ—неполное. Докажемъ же слѣдующую теорему:

Теорема.—Если числа a и $\overline{\alpha-1}$ взаимно-просты, т. е. если общій наибольшій дѣлитель ихъ равенъ 1, то число a—полное; если же этотъ общій наибольшій дѣлитель отличенъ отъ единицы, то число a—неполное.

Доказательство.—Должно разсмотрѣть два случая: 1°, когда $D(\overline{\alpha-1}, a) > 1$; 2°, когда $D(\overline{\alpha-1}, a) = 1$.

Случай 1-ый.—Пусть

$$D(a, \overline{\alpha-1}) = \delta > 1 \qquad [42]$$

Тогда числа a и $\overline{\alpha-1}$ могутъ быть представлены въ видѣ произведеній:

$$\left.\begin{aligned} a &= \delta . a' \\ \overline{\alpha-1} &= \delta . \alpha' \end{aligned}\right| \qquad [43]$$

Вставляя эти значенія a и $\overline{\alpha-1}$ въ формулу [41] и вынося δ за скобку, находимъ:

$$\iota = \delta\,(\mathrm{n}a' - Ц\alpha') \qquad [44]$$

гдѣ a' и α' уже взаимно-первыя числа, такъ что

$$D\,(a', \alpha') = 1 \qquad [45]$$

Изъ формулы [41] слѣдуетъ, что разность какихъ-нибудь значеній для ι, ι_i и $\iota_{i_/}$ будетъ:

$$\iota_i - \iota_{i_/} = \delta\,[(\mathrm{n}_i - \mathrm{n}_{i_/})\,a' - (Ц_i - Ц_{i_/})\,\alpha'] \qquad [46]$$

Выраженіе въ скобкахъ есть цѣлое число, не меньшее единицы, или же нуль. Въ послѣднемъ случаѣ ι_i и $\iota_{i_/}$ были бы тождественны между собою, а въ первомъ, т. е. при

$$|\,(\mathrm{n}_i - \mathrm{n}_{i_/})\,a' - (Ц_i - Ц_{i_/})\,\alpha'\,| = Ц \not< 1 \qquad [47]$$

разность ихъ была бы

$$|\,\iota_i - \iota_{i_/}\,| \not< \delta \qquad [48]$$

т. е.

$$|\,\iota_i - \iota_{i_/}\,| > 1 \qquad [49]$$

при всевозможныхъ парахъ n_i, $Ц_i$; $\iota_{i_/}$, $Ц_{i_/}$. Итакъ,

если $D\,(a, \overline{\alpha - 1}) > 1$, *то* a — *число неполное, класса* II.

Случай 2-ой.—Пусть

$$D\,(a, \overline{\alpha - 1}) = 1 \qquad [50]$$

т. е. пусть числа a и $\overline{\alpha - 1}$ взаимно-просты. Тогда выраженіе для разности какихъ-нибудь двухъ значеній ι, т. е. ι_i и $\iota_{i_/}$ приметъ видъ:

$$\iota_i - \iota_{i_/} = a\,(\mathrm{n}_i - \mathrm{n}_{i_/}) - (\alpha - 1)\,(Ц_i - Ц_{i_/}) \qquad [51]$$

или сокращенно,

$$\iota_i - \iota_{i_/} = a\mathrm{n} - (\alpha - 1)\,Ц \qquad [52],$$

гдѣ n и Ц суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя, а въ остальномъ совершенно произвольныя, т. к. представляютъ собою разности произвольнаго уменьшаемаго и произвольнаго вычитаемаго, ничѣмъ не связанныхъ между собою:

$$\mathrm{n} = \mathrm{n}_i - \mathrm{n}_{i_/}\,;\; Ц = Ц_i - Ц_{i_/} \qquad [53]$$

Т. к. коэффиціенты при n и Ц, т. е. a и $\overline{\alpha - 1}$, взаимно просты, то надлежащимъ подборомъ n и Ц разность $\overline{\iota_i - \iota_{i_/}}$ всегда можетъ быть сдѣлана по абсолютной величинѣ равною единицѣ[1]. Отсюда слѣдуетъ, что, дѣйствительно,

если $D\,(a, \overline{\alpha - 1}) = 1$, *то* a — *число полное, класса* I,

Ч. Т. Д.

---

[1] Другими словами, всегда можно удовлетворить цѣлыми рѣшеніями n и Ц уравненіе

§ 6.—Примѣры раздѣленія чиселъ на классы I и II.

Разсмотримъ, ка̀къ именно распредѣляются числа на классы I и II въ простѣйшихъ системахъ счисленія. При этомъ ясно, что α не можетъ быть менѣе 3, ибо уже при $\alpha = 2$ $\alpha - 1 = 1$, и, слѣдовательно, дѣленіе на два класса, равно какъ и критерій раздѣленія, основанный на разсмотрѣніи $D\,(a, \overline{\alpha - 1})$, теряютъ свой смыслъ.—Результаты представляемъ въ видѣ таблички.

$\alpha = 3$	I	1
	II	2
$\alpha = 4$	I	1 2
	II	3
$\alpha = 5$	I	1 3
	II	2 4
$\alpha = 6$	I	1 2 3 4
	II	5
$\alpha = 7$	I	1 5
	II	2 3 4 6
$\alpha = 8$	I	1 2 3 4 5 6
	II	7
$\alpha = 9$	I	1 3 5 7
	II	2 4 6 8
$\alpha = 10$	I	1 2 4 5 7 8
	II	3 6 9

$$| an - (\alpha - 1)\,Ц | = 1 \qquad [54]$$

или что—то̀ же, уравненію

$$\begin{vmatrix} a & \alpha - 1 \\ Ц & n \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad [55]$$

подъ условіемъ [50] взаимной простоты a и $\overline{\alpha - 1}$. Возможность этого есть частный случай общей возможности найти въ цѣлыхъ числахъ рѣшенія уравненія

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ x & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ y & y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z & z_1 & z_2 & \ldots & z_{n-1} \end{vmatrix} \quad 1, \qquad [56]$$

въ которомъ $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ суть данныя числа, не имѣющія общаго дѣлителя (Ю. Сохоцкій, Высшая Алгебра. Часть вторая, начала теоріи чиселъ. СПБ., 1888, стр. 49 и др. курсы по теоріи чиселъ).

$\alpha = 11$	I	1 3 7 9
	II	2 4 5 6 8 10
$\alpha = 12$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
	II	11
$\alpha = 13$	I	1 5 7 11
	II	2 3 4 6 8 9 10 12
$\alpha = 14$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
	II	13
$\alpha = 15$	I	1 3 5 9 11 13
	II	2 4 6 7 8 10 12 14
$\alpha = 16$	I	1 2 4 7 8 11 13 14
	II	3 5 6 9 10 12 15
$\alpha = 17$	I	1 3 5 7 9 11 13 15
	II	2 4 6 8 10 12 14 16
$\alpha = 18$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9, 10 11 12 13 14 15 16
	II	17
$\alpha = 19$	I	1 5 7 11 13 17
	II	2 3 4 6 8 9 10 12 14 15 16 18
$\alpha = 20$	I	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
	II	19
$\alpha = 21$	I	1 3 7 9 11 13 17 19
	II	2 4 5 6 8 10 12 14 15 16 18 20
$\alpha = 22$	I	1 2 4 5 8 10 11 13 16 17 19 20
	II	3 6 7 9 12 14 15 18 21
$\alpha = 23$	I	1 3 5 7 9 13 15 17 19 21
	II	2 4 6 8 10 11 12 14 16 18 20 22

. . . .

. . . .

§ 7.—О числахъ неполныхъ, класса II.

Вернемся къ формулѣ [46]. Принимая во вниманіе обозначенія [53], мы сможемъ переписать ее въ видѣ

$$\iota_1 - \iota_{1'} = \delta\,(\mathrm{n}a' - \text{Ц}\alpha') \qquad [57]$$

гдѣ n и Ц—цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя—безразлично, и притомъ произвольныя. Вспоминая, далѣе, формулу [45], показывающую взаимную простоту чиселъ a′ и α', и примѣняя на этомъ основаніи къ внутри-скобочному выраженію правой части [57] соотношеніе [56], мы можемъ утверждать, что, при надлежащемъ выборѣ n и Ц, всегда можетъ быть удовлетворено равенство

$$|na' - Ц\alpha'| = 1, \qquad [58]$$

почему разность $\iota_i - \iota_{i'}$ всегда можетъ быть приведена къ $\pm\delta$, но не къ числу меньшему δ.

$$\text{minim.}\ |\iota_i - \iota_{i'}| = \delta \qquad [59].$$

Но т. к. величина δ зависитъ только отъ свойствъ чиселъ a и $\overline{\alpha-1}$ (см. [43]), то ясно, что для всякаго числа ι_i, при неизмѣнности a и $\overline{\alpha-1}$, найдется другое, $\iota_{i'}$ отстоящее отъ него на $\pm\delta$ единицъ. Другими словами, всѣ редукціи прогрессіи [31], т. е. всѣ числа [32], могутъ быть расположены въ новую восходящую ариѳметическую прогрессію съ разностью $\pm\delta$. Нѣкоторый членъ ея будетъ $a = a'\delta$. Итакъ, вотъ въ какомъ видѣ можетъ быть представлена группа чиселъ [32]:

$$\div a'\delta - m_1\delta;\ a'\delta - \overline{m_1 - 1}\delta;\ a'\delta - \overline{m_1 - 2}\delta;\ \ldots\ldots a'\delta - \delta;$$
$$a'\delta;\ a'\delta + \delta;\ a'\delta + 2\delta;\ \ldots\ a'\delta + \overline{m_2 - 1}\delta;\ a'\delta + m_2\delta \qquad [60]$$

или еще какъ

$$\div (a' - m_1)\delta;\ (a' - \overline{m_1 - 1})\delta;(a' - \overline{m_1 - 2})\delta;\ \ldots\ldots (a' - 2)\delta;$$
$$(a' - 1)\delta;\ a'\delta;\ (a' + 1)\delta;\ (a' + 2)\delta;\ \ldots\ldots (a' + \overline{m_2 - 1})\delta;$$
$$(a' + m_2)\delta \qquad [61]$$

Послѣднія формулы позволяютъ обобщить результаты предыдущаго разсмотрѣнія въ одномъ общемъ положеніи, одинаково справедливомъ, какъ примѣнительно къ числамъ класса I, такъ и въ примѣненіи къ числамъ класса II. Именно, обозначивъ черезъ $D(a, \overline{\alpha-1})$ общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и $\overline{\alpha-1}$, независимо отъ того, къ какому классу принадлежитъ число a, мы можемъ сказать: редукціи всѣхъ чиселъ [31], получаемыхъ чрезъ умноженіе a на рядъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, . . . n, ... , образуютъ рядъ, могущій быть расположеннымъ въ видѣ восходящей ариѳметической прогрессіи:

$$\left.\begin{array}{c}\div [a - m_1 D(a, \overline{\alpha-1})];\ [a - \overline{m_1 - 1}\ D(a, \overline{\alpha-1})];\\ \ldots\ldots [a - 1.\ D(a, \overline{\alpha-1})];\ a;\\ [a + 1.\ D(a, \overline{\alpha-1})];\ \ldots\ldots a + \overline{m_2 - 1}\ D(a, \overline{\alpha-1})];\\ [a + m_2\ D(a, \overline{\alpha-1})]\end{array}\right| \qquad [62].$$

съ разностью

$$\pm D(a, \overline{\alpha-1}).$$

Для чиселъ полныхъ эта разность равна ± 1, а для неполныхъ—по абсолютной величинѣ она > 1.

Формула [59] показываетъ, что для чиселъ неполныхъ разность между ближайшими (по величинѣ) числами ряда [32] или смежными числами ряда [60] и [61] по абсолютной величинѣ равна δ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ тѣ числа, которыя разнятся отъ a менѣе, чѣмъ на цѣлое δ, т. е. не на $\pm$ nδ, не попадутъ въ ряды [32], [60] или [61]. Является вопросъ, сколько же будетъ такихъ чиселъ опущенныхъ. Число всѣхъ чиселъ $= \alpha - 1$; опредѣлимъ же число попавшихъ. Это—возростающія числа:

$$\left.\begin{array}{l} a - m_1\delta;\ a - \overline{m_1 - 1}\delta;\ \ldots a - 2\delta;\ a - \delta;\ a;\ a + \delta;\ a + 2\delta; \\ \qquad \ldots\ldots a + \overline{m_2 - 1}\,\delta;\ a + m_2\delta \end{array}\right| \quad [63]$$

при чемъ первое изъ нихъ должно быть болѣе нуля, а послѣднее—менѣе α. Слѣдовательно, подбирая елико возможно большія m_1 и m_2 такъ, чтобы удовлетворились неравенства:

$$\left.\begin{array}{l} a - m_1\delta > o \\ a + m_2\delta < \alpha \end{array}\right| \quad [64]$$

мы можемъ сказать, что число чиселъ [63] только на одну единицу, соотвѣтствующую не вошедшему въ общій счетъ члену a, болѣе $\overline{m_1 + m_2}$. Но изъ [64] слѣдуетъ, что должны быть

$$\left.\begin{array}{l} m_1 < \dfrac{a}{\delta} \\ m_2 < \dfrac{\alpha - a}{\delta} \end{array}\right| \quad [65]$$

или, т. к.

$$\frac{\alpha - a}{\delta} = \frac{\alpha - 1}{\delta} - \frac{a}{\delta} + \frac{1}{\delta}, \quad [66]$$

то, въ силу [43],

$$\left.\begin{array}{l} m_1 < a' \\ m_2 < \alpha' - a' + \dfrac{1}{\delta} \end{array}\right| . \quad [67]$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = a' - 1 \\ m_2 = \alpha' - a' \end{array}\right| \quad [68]$$

Вставляя значенія m_1 и m_2 изъ [68] въ [64], находимъ, что, дѣйствительно, неравенства [64] удовлетворяются. Слѣдовательно, число чиселъ, вошедшихъ въ рядъ [63], N, будетъ таково:

$$N = m_1 + m_2 + 1 \qquad [69]$$

т. е.

$$N = \alpha' \qquad [70]$$

или, что то же,

$$N = \frac{\alpha - 1}{\delta} = \frac{\alpha - 1}{D\,(a,\ \alpha - 1)} \qquad [71]$$

что всегда даетъ число цѣлое, какъ видно изъ тождества этого числа съ его же значеніемъ изъ [70].

Итакъ, число чиселъ не вошедшихъ въ рядъ [29], M, будетъ

$$M = \alpha - 1 - N = \alpha - 1 - \frac{\alpha - 1}{\delta} \qquad [72]$$

или

$$M = \frac{(\alpha - 1)\ (\delta - 1)}{\delta} = \alpha'\ (\delta - 1) \qquad [73]$$

Слѣдовательно, отношеніе числа чиселъ вошедшихъ къ числу чиселъ не вошедшихъ въ рядъ [29] будетъ:

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{\delta - 1} \qquad [79]$$

откуда ясно, что отношеніе это убываетъ вмѣстѣ съ возростаніемъ δ, а при наименьшемъ значеніи δ, $\delta = 1$, дѣлается ∞.

§ 8.—Примѣры вычисленія чиселъ N для разныхъ α и a.

Представляемъ результаты вычисленій въ видѣ таблички:

	$a =$	2	
$\alpha =$ **3**	$\delta =$	2	
	$N =$	1	
	$a =$	3	
$\alpha =$ **4**	$\delta =$	3	
	$N =$	1	
	$a =$	2	4
$\alpha =$ **5**	$\delta =$	2	4
	$N =$	2	1
	$a =$	5	
$\alpha =$ **6**	$\delta =$	5	
	$N =$	1	

	a =	2	3	4	6				
$\alpha =$ **7**	$\delta =$	2	3	2	6				
	N =	3	2	3	1				
	a =	7							
$\alpha =$ **8**	$\delta =$	7							
	N =	1							
	a =	2	4	6	8				
$\alpha =$ **9**	$\delta =$	2	4	2	8				
	N =	4	2	4	1				
	a =	3	6	9					
$\alpha =$ **10**	$\delta =$	3	3	9					
	N =	3	3	1					
	a =	2	4	5	6	8	10		
$\alpha =$ **11**	$\delta =$	2	2	5	2	2	10		
	N =	5	5	2	5	5	1		
	a =	11							
$\alpha =$ **12**	$\delta =$	11							
	N =	1							
	a =	2	3	4	6	8	9	10	12
$\alpha =$ **13**	$\delta =$	2	3	4	6	4	3	2	12
	N =	6	4	3	2	3	4	6	1
	a =	13							
$\alpha =$ **14**	$\delta =$	13							
	N =	1							
	a =	2	4	6	7	8	10	12	14
$\alpha =$ **15**	$\delta =$	2	2	2	7	2	2	2	14
	N =	7	7	7	2	7	7	7	1
	a =	3	5	6	9	10	12	15	
$\alpha =$ **16**	$\delta =$	3	5	3	3	5	3	15	
	N =	3	3	5	5	3	5	1	
	a =	2	4	6	8	10	12	14	16
$\alpha =$ **17**	$\delta =$	2	4	2	8	2	4	2	16
	N =	8	4	8	2	8	4	8	1
	a =	17							
$\alpha =$ **18**	$\delta =$	17							
	N =	1							

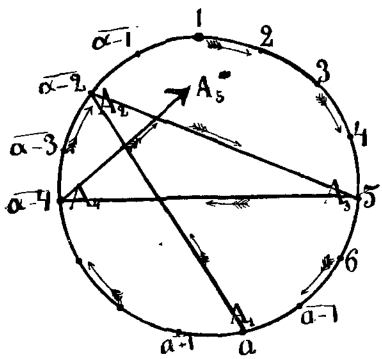
$\alpha = 19$	a =	2	3	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18
	δ =	2	3	2	6	2	9	2	6	2	3	2	18
	N =	9	6	9	3	9	2	9	3	9	6	9	1
$\alpha = 20$	a =	19											
	δ =	19											
	N =	1											
$\alpha = 21$	a =	2	4	6	8	10	12	14	15	16	18	20	
	δ =	2	4	2	4	10	4	2	5	4	2	20	
	N =	10	5	10	5	2	5	10	4	5	10	1	
$\alpha = 22$	a =	3	6	7	9	12	14	15	18	21			
	δ =	3	3	7	3	3	7	3	3	21			
	N =	7	7	3	7	7	3	7	7	1			
$\alpha = 23$	a =	2	4	6	8	10	11	12	14	16	18	20	22
	δ =	2	2	2	2	2	11	2	2	2	2	2	22
	N =	11	11	11	11	11	2	11	11	11	11	11	1

§ 9.—Геометрическая интерпретація различія двухъ классовъ чиселъ.

Чтобы интерпретировать геометрически добытые результаты, касающіеся свойствъ чиселъ полныхъ и неполныхъ, вернемся къ схематическому изображенію $\alpha - 1$ категорій чиселъ въ α-ичной системѣ, которое описано въ § 3. Каждая изъ точекъ дѣленія этой окружности является изобразительницей для числа класса I или II. Но различіе этихъ точекъ не видно непосредственно и становится видимымъ лишь изъ поставленія въ связь изучаемой точки со всѣми остальными. Станемъ (см. чертежъ 2-й) находить точки, соотвѣтствующія ряду [29]. Это можно сдѣлать двояко: либо, исходя изъ точки 1, отсчитать отъ нея, по часовой стрѣлкѣ, точку a-тую; затѣмъ, исходя изъ a-той и принимая ее за 1-ую, отсчитать снова точку a-тую; затѣмъ отъ этой точки—опять a-тую и т. д. все въ одну и ту же сторону, каковымъ процессомъ мы найдемъ всѣ точки

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ 6a, \ldots \qquad \text{(см. [31])}$$

(написанныя при нихъ числа на окружности представятъ тогда редукціи ряда [31], т. е. рядъ [32], который, какъ сказано, рано или поздно долженъ начать повторяться), либо прямо взявъ редукціи ряда [31] и находя соотвѣтственныя точки окружности. Тотъ и другой процессъ, понятно, поведуть къ одному результату. Но только, при послѣднемъ способѣ дѣйствованія, мы не станемъ приводить рядъ редукцій къ виду ариѳметической прогрессіи (возможность чего доказана въ § 7), но сохранимъ порядокъ членовъ въ рядѣ [32] не затронутымъ перемѣщеніемъ, т. е. соотвѣтствующимъ порядку ряда [31]. Чтобы охарактеризовать и зафиксировать этотъ порядокъ, при соотвѣтственныхъ числамъ точкахъ поставимъ букву A съ индексами, соотвѣтствующими нумерамъ членовъ въ рядахъ [31] и [32].



Чертежъ 2-й.

Итакъ, мы имѣемъ конечный рядъ точекъ

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots\ldots A_i, \ldots\ldots A_N \qquad [75]$$

гдѣ N опредѣляется изъ формулы [70] или [71], дающей при $D(a,\ \overline{\alpha - 1}) = 1$

$$N = \alpha - 1 \qquad [76].$$

Станемъ теперь соединять прямомолинейными отрѣзками точки смежныхъ нумеровъ. Получится ломанная. Т. к. число точекъ A_i конечно и послѣ A_N точки начнутъ повторяться, то, рано или поздно, при построеніи такой ломанной, концы ея должны сомкнуться, и она представитъ собою нѣкоторый звѣздчатый или выпуклый N-угольникъ. Изъ самаго процесса нахожденія вершинъ его [75] явствуетъ, что сосѣднія вершины, ближайшія другъ къ другу, если отсчитывать разстояніе по дугѣ окружности, отстоятъ другъ отъ друга на одинаковыя разстоянія, равныя разности ариѳметической прогрессіи [62], т. е. на

$$\delta = D\ (a,\ \overline{\alpha - 1}) \qquad [77]$$

единицъ (между ними $\delta - 1$ точекъ) и, въ случаѣ взаимной простоты a и $\overline{\alpha - 1}$, занимаютъ сосѣднія точки дѣленія нашей окружности. Съ другой стороны, вершины смежныя, т. е. прилегающія къ одной сторонѣ многоугольника, отстоятъ другъ отъ друга на a единицъ (между ними

$a - 1$ точекъ), слѣдовательно стягиваютъ равныя дуги. Изъ того и другого обстоятельства видно, что нашъ N-угольникъ — правильный. Если вершины его расположены такъ часто, что между ними нѣтъ уже точекъ дѣленія окружности, то ясно, что ломанная линія своими углами исчерпаетъ всѣ точки дѣленія. Отсюда понятно, что число a,—въ данномъ случаѣ полное, класса I—, раскрываетъ свои свойства, такъ сказать, въ такомъ полно-лепестковомъ многоугольникѣ. Если же не всѣ точки дѣленія заняты вершинами многоугольника, но нѣкоторыя пустуютъ, то число a,—неполное, класса II—, раскрываетъ свои свойства въ многоугольникѣ съ неполнымъ числомъ лепестковъ. И обратно, полному числу соотвѣтствуетъ полный многоугольникъ, неполному—неполный.

Такимъ образомъ, число изображается не только точкою, но и многоугольникомъ. Представленіе числа многоугольникомъ позволяетъ узнать внутреннюю природу его, такъ сказать, кладетъ число подъ микроскопъ. Точка-бутонъ раскрываетъ въ многоугольникѣ-цвѣткѣ свои потенціи, и то, что ранѣе, въ точкѣ, было доступно одному только умозрѣнію, тутъ дѣлается интуитивно-очевиднымъ; то, что было въ своей реальности предметомъ убѣжденія, дѣлается опытно-провѣряемымъ.

Но, является вопросъ, всегда ли такое раскрытіе возможно? Или, можетъ быть, для данныхъ методовъ и средствъ, т. е. внутри системы съ основаніемъ α, нѣкоторыя числа a окажутся неразложимыми, такъ сказать, ультра-микроскопическими? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, необходимо обратиться къ формуламъ [70] и [71], которыя можно переписать такъ:

$$N = \alpha' = \frac{\alpha - 1}{D(a,\ \alpha - 1)} \qquad [78].$$

Ясное дѣло, что раскрытіе числа a въ многоугольникъ будетъ невозможно только въ одномъ случаѣ—когда многоугольникъ, соотвѣтствующій числу a не существуетъ. А это можетъ быть тогда только, когда онъ долженъ былъ бы имѣть одну (или ни одной) вершины. Другими словами, наше число a нераскрываемо, когда соотвѣтствующее ему число $N = 1$. Чтобы узнать, какимъ же a соотвѣтствуетъ случай невозможности раскрытія, приравняемъ правую часть равенства [78] единицѣ и опредѣлимъ изъ этого условія a.

$$1 = \alpha' = \frac{\alpha - 1}{D(a, \alpha - 1)} \qquad [78].$$

Но т. к.

$$\alpha - 1 > a, \qquad [79]$$

то ясно, что $D(a, \alpha - 1) = \alpha - 1$ (а это необходимо для уравненія) только тогда, когда $a = \alpha - 1$, [78]. Отсюда

$$a = \alpha - 1 \qquad [80]$$

Итакъ, если построеніе невозможно, если число a нераскрываемо, то число a равно $\alpha - 1$. И обратно, если число a равно $\alpha - 1$, то оно нераскрываемо, и построеніе невозможно. Въ послѣднемъ убѣждаемся, подставляя въ [77] вмѣсто a равное ему $\alpha - 1$. Тогда окажется, что $N = 1$, т. е. построеніе многоугольника невозможно.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, найденная теорема показываетъ, что не существуетъ чиселъ, нераскрываемыхъ ни при какихъ методахъ. Стоитъ только увеличить основаніе системы, α, такъ, чтобы $\alpha - 1$ было болѣе a, и число a раскроется. Мы, такъ сказать, увеличили нумеръ микроскопнаго объектива, усилили разлагающую способность нашего микроскопа, и точка раскрылась въ многоугольникъ. Нѣтъ ни одной точки-числа абсолютно нераскрываемой, и, подбирая надлежащимъ образомъ систему счисленія, мы всегда сможемъ конкретно изучить всякое число a.

При этомъ увеличеніи α, мы можемъ отмѣтить еще одно обстоятельство: параллельно съ возрастаніемъ α, въ общемъ, все пышнѣе и пышнѣе развертываются потенціи числа-точки и всѣ числа-многоугольники; исключеніе можетъ представить лишь случай, когда сравнительно небольшой приростъ $\alpha - 1$ даетъ сравнительно большое приращеніе $D(a, \alpha - 1)$, такъ что отношеніе ихъ, равное N, уменьшится. Но, въ общемъ, чѣмъ болѣе α, тѣмъ махровѣе распускается a, тѣмъ болѣе лепестковъ у многоугольника, соотвѣтствующаго числу, тѣмъ мощнѣе проявляются потенціи числа a.

Случай, когда отношеніе a и $\alpha - 1$, есть единица, т. е. $N = 1$ изображается, какъ сказано, одною лишь точкою. Другія интересныя построенія получаются тогда, когда а является какою-либо изъ аликвотныхъ частей $\overline{\alpha - 1}$, т. е. когда

$$\frac{\overline{\alpha-1}}{a} = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \quad [81]$$

Тогда

$$D(\overline{\alpha - 1}, a) = a. \quad [82]$$

и потому соотвѣтственныя значенія N будутъ таковы:

$$N = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \quad [83]$$

Случай $N = 2$ изображается „дву-угольникомъ" и возможенъ, конечно, только при α нечетномъ, вида $(2\beta + 1)$, гдѣ $\beta = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Діаметръ окружности, соединяющій точки a и 2a ($a = \frac{\alpha - 1}{2}$ и $2a = \overline{\alpha - 1}$), служитъ сказаннымъ „дву-угольникомъ".

Случай $N = 3$ изображается треугольникомъ, имѣющимъ вершины въ точкахъ a, 2a и 3a:

$$a = \frac{\alpha - 1}{3}, \quad 2a = \frac{2(\alpha - 1)}{3}, \quad 3a = \overline{\alpha - 1}.$$

Точно также, случаи $N = 4$, $N = 5$, $N = 5$ и т. д. соотвѣтствуютъ четыреугольнику, пятиугольнику и т. д. Всѣ они интересны тѣмъ, что получаемыя при нихъ многоугольники правильны и выпуклы, тогда какъ въ иныхъ случаяхъ многоугольники оказываются звѣздчатыми.

Изъ всего сказаннаго ясно, наконецъ, что взявъ

$$\alpha = m! + 1, \quad [84]$$

гдѣ

$$m! = 1 . 2 . 3 . 4 . 4 \ldots m,$$

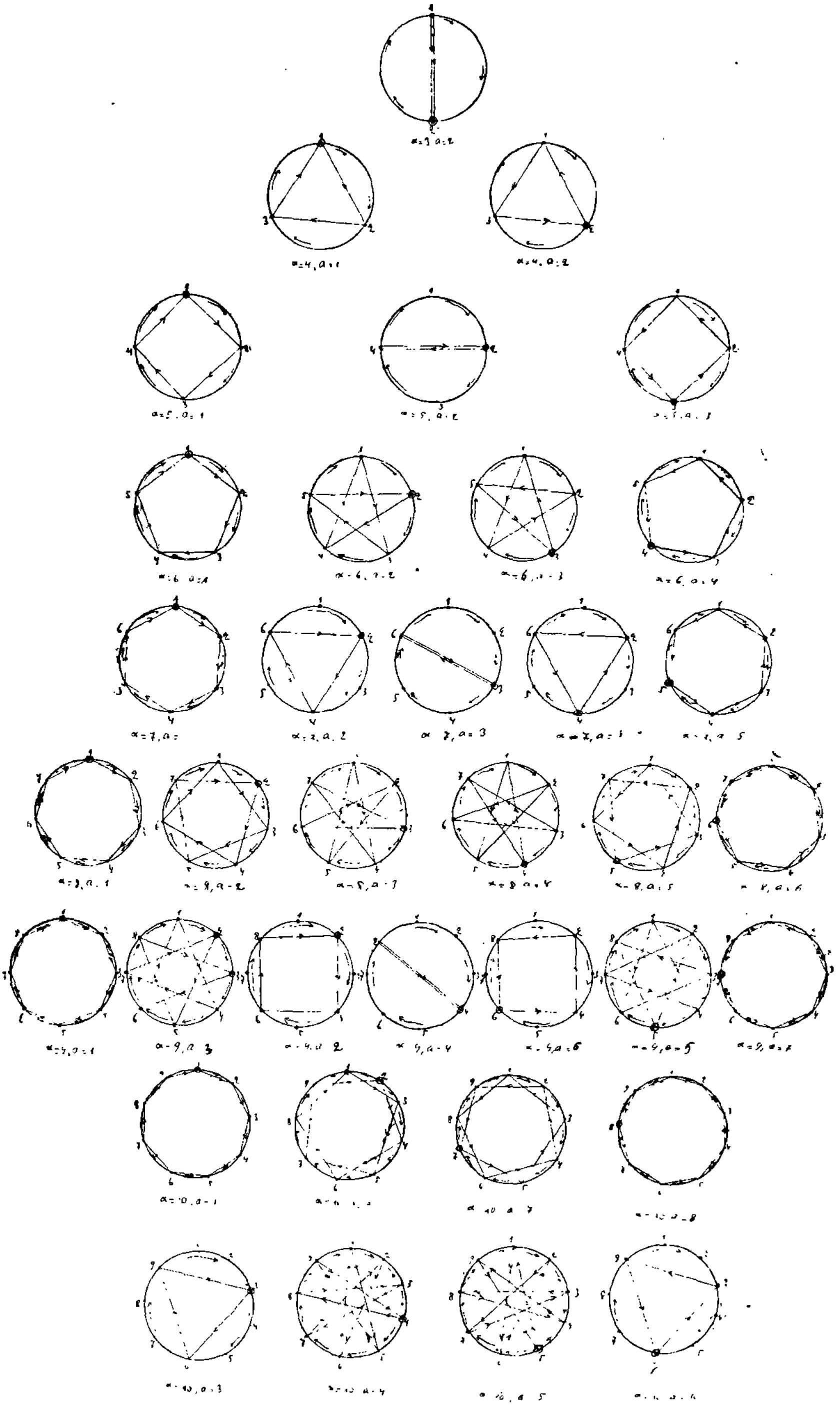
мы создадимъ систему счисленія, въ которой каждое число a, удовлетворяющее условію

$$a \leq m, \quad [85]$$

представляется правильнымъ выпуклымъ многоугольникомъ. Увеличивая m, мы изображеніе всякаго a можемъ превратить изъ многоугольника звѣздчатаго въ многоугольникъ выпуклый.

§ 10.— Примѣры геометрической интерпретаціи числа.

Мы дадимъ тутъ нѣсколько примѣровъ раскрытія точки-числа въ многоугольникъ и воспользуемся для этой цѣли таблицами § 6 и § 8. Самыя схемы вычерчены отдѣльно (см. чертежъ 3-й).



Чертежъ 3-й.

$\alpha =$ **3.** Возможенъ одинъ только многоугольникъ — „двуугольникъ“ или, діаметръ окружности, раскрывающій полное чи́сло 1. Неполное число 2, какъ равное $\alpha - 1$, нераскрываемо и представляется одною только точкою 2.

$\alpha =$ **4.** Возможны два многоугольника—оба треугольники—, раскрывающіе полныя числа 1 и 2. Неполное же число 3 нераскрываемо, какъ равное $\alpha - 1$

$\alpha =$ **5.** Возможны два многоугольника—четыреугольники—, раскрывающіе полныя числа 1 и 3. Кромѣ того, возможенъ еще двуугольникъ, раскрывающій одно изъ неполныхъ чиселъ, 2.

$\alpha =$ **6.** Четыре полныхъ числа: 1, 2, 3, 4 изобразятся соотвѣтствующими пятиугольниками.

$\alpha =$ **7.** Полныхъ чиселъ—два: 1, 5. Они изобразятся шестиугольниками. Неполныхъ — четыре: 2, 3, 4, 6. Изъ нихъ: число 2 изобразится треугольникомъ, два другіе—двуугольниками и, наконецъ, послѣднее нераскрываемо.

$\alpha =$ **8.** Неполныхъ чиселъ—шесть: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Всѣ они представятся семиугольниками,

$\alpha =$ **9.** Чиселъ полныхъ—четыре: 1, 3, 5, 7. Они представятся восьмиугольниками. Чиселъ неполныхъ — тоже четыре: 2, 4, 6, 8. Изъ нихъ 2 и 6 представятся четыреугольниками, а 4—двуугольникомъ.

$\alpha =$ **10.** Чиселъ полныхъ—шесть: 1, 2, 4, 5, 7, 8. Они представятся девятиугольниками. Чиселъ неполныхъ—три: 3, 6, 9. Первыя два изъ нихъ изобразятся треугольниками.

§ 11.—Сродныя числа класса.

Редукція позволила намъ уменьшить число объектовъ изученія съ безконечно-большой группы до группы мощностью въ $\alpha - 1$. Вновь вводимое понятіе о сродствѣ чиселъ снова сократитъ эту мощность.

Назовемъ два числа a_1 и a_2, написанныя по одной и той же системѣ счисленія съ основаніемъ α, сродными, если они могутъ быть представлены въ видѣ

$$a_1 = a, \qquad a_2 = \alpha - 1 - a. \qquad [86]$$

Сродными мы называемъ ихъ по причинамъ, которыя обнаружатся впослѣдствіи. Ясно, что каждая пара сродныхъ чиселъ a_1 и a_2 удовлетворяетъ соотношенію

$$a_1 + a_2 = \overline{\alpha - 1} \qquad [87]$$

т. е. одно число дополняетъ другое до $\overline{\alpha - 1}$.

Отсюда видно, что сродство чиселъ уничтожается съ измѣненіемъ системы счисленія. Два числа, сродныя при данномъ α, перестаютъ быть сродными при α иномъ, и обратно, всякія два произвольно-выбранныя числа a_1 и a_2 окажутся сродными въ системѣ счисленія съ соотвѣтственно-подобраннымъ основаніямъ α, такъ именно, чтобы

$$\alpha = a_1 + a_2 + 1 \qquad [88]$$

Построимъ для каждаго изъ сродныхъ чиселъ a_1 и a_2 раскрывающій его многоугольникъ и разсмотримъ, въ какомъ соотношеніи находятся оба многоугольника между собою.— Мы знаемъ, прежде всего, что сосѣднія вершины того и другого многоугольника должны отстоять другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ: δ_1 для многоугольника, соотвѣтствующаго a_2, и δ_2 для многоугольника, соотвѣтствующаго a_2 (см. чертежъ 4-й). При этомъ:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = D(a_1, \overline{\alpha - 1});\ a_1 = \delta_1 a'_1;\ \overline{\alpha - 1} = \delta_1 \alpha'_1;\ D(a'_1, \alpha'_1) = 1 \\ \delta_2 = D(a_2, \overline{\alpha - 1});\ a_2 = \delta_2 a'_2;\ \overline{\alpha - 1} = \delta_2 \alpha'_2;\ D(a'_2, \alpha'_2) = 1 \end{array}\right| \qquad [89]$$

Но, въ силу формулъ [86],

$$\delta_2 = D(\overline{\alpha - 1} - a_1, \overline{\alpha - 1}) = D(\overline{\alpha'_1\delta_1 - a'_1\delta_1}, \overline{\alpha'_1\delta_1}) \qquad [90]$$

А т. к. $D(a'_1, \alpha'_1) = 1$ (см. [89]) и, слѣдовательно,

$$D(\overline{\alpha'_1}, \overline{\alpha'_1 - a'_1}) = 1, \qquad [91]$$

то ясно, что общимъ наибольшимъ дѣлителемъ у $\overline{\alpha'_1\delta_1 - a'_1\delta_1}$ и $\overline{\alpha'_1\delta_1}$ является δ_1, почему разности нашихъ ариѳметическихъ прогрессій оказываются одинаковыми:

$$\delta_2 = \delta_1 = \delta \qquad [92]$$

Отсюда слѣдуетъ, что

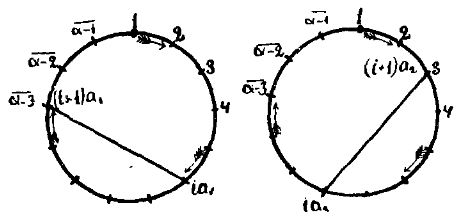
$$\alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha';\ a'_1 = \alpha' - a'_2 \qquad [93]$$

Кромѣ того, формула [92] показываетъ, что сродныя числа всегда принадлежатъ къ одному классу: если $\delta = 1$, то—къ классу I, если $\delta > 1$, то—къ классу II.

Число вершинъ многоугольниковъ для a_1 и a_2, N_1 и N_2 тоже равны между собою:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{\alpha - 1}{\delta_1} = \alpha' \\ N_2 &= \frac{\alpha - 1}{\delta_2} = \alpha' \end{aligned}\right| \qquad [94]$$

что, впрочемъ, понятно и само собою изъ равенства разстояній сосѣднихъ вершинъ. Наконецъ, стороны многоугольниковъ, а слѣдовательно и углы, равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, для многоугольника, раскрывающаго a_1, дуговое разстояніе между **смежными** вершинами, отсчитываемое въ положительномъ направленіи окружности, есть $a_1 = a$, отсчитываемое же въ отрицательномъ направленіи дуги—оно будетъ $a_2 = \overline{\alpha - 1} - a$. А для многоугольника, раскрывающаго a_2,—наоборотъ,—разстояніе смежныхъ вершинъ, считаемое въ по-



Чертежъ 4-й.

ложительномъ направленіи дуги, есть $a_2 = \overline{\alpha - 1 - a}$; но отсчитываемое въ отрицательномъ направленіи дуги, оно равняется $\overline{\alpha - 1} - a_2 = a$. Итакъ, по абсолютной величинѣ, дуги, стягиваемыя сторонами нашихъ N-угольниковъ, а потому и сами стягивающія стороны, равны между собою. Но только, одна стягиваетъ бо́льшую дугу, а другая дополнительную къ первой, ме́ньшую, если принимать въ расчетъ и направленіе дугъ. Поэтому, считая хорду направленной та́къ же, какъ и стягиваемая дуга, мы можемъ сказать, что хорды обоихъ N-угольниковъ равны, но взаимно-обратны по направленію.

Итакъ, доказано, что число вершинъ у многоугольниковъ, раскрывающихъ a_1 и a_2, одинаково и что разстоянія вершинъ сосѣднихъ, равно какъ и вершинъ смежныхъ, равны между собою. Слѣдовательно, многоугольники наши тождественны по своей формѣ, но, въ силу взаимной обратности хордъ, проходятся въ противоположныхъ направленіяхъ. Остается разсмотрѣть, какъ они расположены относительно другъ друга. Посмотримъ, не совпадаютъ ли какія-либо изъ ихъ вершинъ. Очевидно, что если будетъ обнаружено совпаденіе какой-нибудь одной, произвольно взятой, пары, то eo ipso будетъ доказано совпаденіе всѣхъ вершинъ попарно. — Совпаденіе какой-нибудь пары вершинъ, k-той, $A_1^{(k)}$, изъ перваго многоугольника, и l-той, $A_2^{(l)}$, изъ второго, требуетъ равенства соотвѣтствующихъ этимъ вершинамъ чиселъ, приписанныхъ около окружности, т. е. должно быть

$$a_1 + k.\delta_1 = a_2 + l.\delta_2 \qquad [95]$$

гдѣ k и l произвольныя цѣлыя числа. Принимая во вниманіе [86] и [92], находимъ:

$$a_1 + k.\delta = \overline{\alpha - 1 - a} + l.\delta \qquad [96]$$

откуда, принимая во вниманіе [89], получаемъ:

$$k - l = \frac{\overline{\alpha - 1} - 2a}{\delta} = \alpha' - 2a' \qquad [97]$$

Итакъ, k-тая вершина перваго многоугольника совпадаетъ съ l-той вершиной второго, при чемъ вершины второго отстаютъ, запаздываютъ относительно вершинъ перваго на величину $\frac{\alpha - 1 - 2a}{\delta}$ или, что то́ же, на величину $\alpha' - 2a'$.

Слѣдовательно, чтобы найти, съ какою вершиною перваго многоугольника совпадаетъ l-тая вершина второго, надо къ числу ея придать вышеуказанную разность фазъ $\frac{\alpha - 1 - 2a}{\delta}$.

Такимъ образомъ окончательно выяснилось, въ какой связи стоятъ раскрытія двухъ сродныхъ чиселъ a_1 и a_2. Это — совпавшія между собою совершенно тождественныя многоугольники, изъ которыхъ первый повернутъ около центра окружности въ положительную сторону дуги (по часовой стрѣлкѣ) на величину $\frac{\alpha - 1 - 2a}{\delta}$ или, что то́ же, второй повернуть относительно перваго въ отрицательную сторону дуги противъ положительной дуги (противъ часовой стрѣлки) на ту же величину $\frac{\overline{\alpha - 1} - 2a}{\delta}$. Но каждая сторона этихъ многоугольниковъ проходится въ этихъ двухъ раскрытіяхъ въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, причемъ обходъ многоугольника въ первомъ случаѣ начинается съ а-той точки окружности, а во второмъ—съ $\overline{\alpha - 1}$ — а-той. Но т. к. для характеристики числа намъ не важно ни направленіе обхода раскрывающаго его многоугольника, ни начало движенія, а только видъ многоугольника, то мы можемъ признать полное сходство у многоугольниковъ, раскрывающихъ сродныя числа. Этимъ число изучаемыхъ чиселъ снова уменьшается, какъ сказано въ началѣ § 11. Въ самомъ дѣлѣ: всего различныхъ чиселъ $\overline{\alpha - 1}$. Изъ нихъ наибольшее, $\overline{\alpha - 1}$, изучать нечего, т. к. въ предѣлахъ данной системы счисленія оно не раскрываемо (§ 9, [74]). Итого—остается $\overline{\alpha - 2}$ чиселъ. Изъ нихъ половина, $\frac{\overline{\alpha - 2}}{2}$ (если $\overline{\alpha - 2}$ четно), или $\frac{\overline{\alpha - 3}}{2}$ (если $\overline{\alpha - 2}$ нечетно и, слѣдовательно, четно $\overline{\alpha - 3}$) можетъ быть оставлена безъ разсмотрѣнія, т. к. тождественна по своимъ раскрытіямъ съ начальными. Слѣдовательно, въ каждой системѣ съ основаніемъ α надо изучить Λ чиселъ, при чемъ

$$\Lambda = \frac{\alpha - 1}{2} \qquad [98$$

или

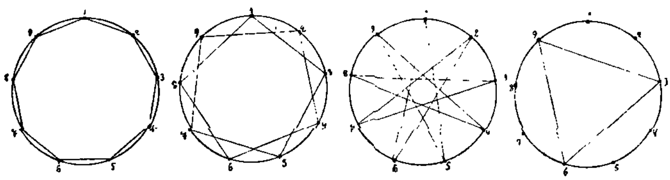
$$\Lambda = E\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) \qquad [99],$$

гдѣ E есть символъ цѣлой функціи своего аргумента, entière отъ x.

Такимъ образомъ, изученіе всѣхъ чиселъ каждой α-ичной системы сводится къ изученію Λ основныхъ существенно-различныхъ символовъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots \overline{\Lambda - 1},\ \Lambda \qquad [100],$$

распредѣляющихся на классы I и II и раскрывающихъ свою внутреннюю структуру въ Λ несводимыхъ другъ къ другу правильныхъ многоугольниковъ. Таковы подлинные кирпичи, атомы α-ичной системы счисленія, и съ однимъ изъ нихъ сходно каждое число въ этой системѣ, какъ бы оно ни было велико. Какъ извѣстное число несводимыхъ другъ къ другу фонетическихъ элементовъ,—корней—, лежитъ въ основаніи группы языковъ и производитъ изъ себя все многообразіе лексики, такъ же эти Λ основныхъ символовъ являются фундаментомъ α-ичной системы счисленія и поророждаютъ изъ себя все многообразіе ариѳметическаго лексикона данной системы. Поэтому было бы умѣстно эти Λ символовъ назвать **корнями** или **элементами** α-ичной системы счисленія. Для системы десятичной формула [99] даетъ $\Lambda = 4$. Изъ этихъ 4-хъ чиселъ къ классу I принадлежатъ: 1, 2 и 4, а къ классу II—число 3. Нижеслѣдующій чертежъ 5-й представляетъ 4 многоугольника, раскрывающіе эти 4 элемента десятичной системы.



Чертежъ 5-й.

§ 12. Примѣры вычисленія чиселъ Λ.

$\alpha = 3$	$\Lambda = 1$	$\alpha = 14$	$\Lambda = 6$
$\alpha = 4$	$\Lambda = 1$	$\alpha = 15$	$\Lambda = 7$
$\alpha = 5$	$\Lambda = 2$	$\alpha = 16$	$\Lambda = 7$
$\alpha = 6$	$\Lambda = 2$	$\alpha = 17$	$\Lambda = 8$
$\alpha = 7$	$\Lambda = 3$	$\alpha = 18$	$\Lambda = 8$
$\alpha = 8$	$\Lambda = 3$	$\alpha = 19$	$\Lambda = 9$
$\alpha = 9$	$\Lambda = 4$	$\alpha = 20$	$\Lambda = 9$
$\alpha = 10$	$\Lambda = 4$	$\alpha = 21$	$\Lambda = 10$
$\alpha = 11$	$\Lambda = 5$	$\alpha = 22$	$\Lambda = 10$
$\alpha = 12$	$\Lambda = 5$	$\alpha = 23$	$\Lambda = 11$
$\alpha = 13$	$\Lambda = 6$	. . . .	. . . .

Священникъ Павелъ Флоренскій.